Přednáška MA2 24. 2. 20 – příklady

I. determinant čtvercové matice

Definice:

1) $n=2$ $\quad \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ $\quad \left(= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\right.$ také značíme)

2) $n>2$ $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}$

označíme S_{ij} subdeterminant k prvku a_{ij} v $\det A$

– S_{ij} je determinant matice, kterou „dostaneme", když v A „vynecháme (škrtneme) i-tý řádek a j-tý sloupec a

$A_{ij} = (-1)^{i+j}\, S_{ij}$.

Determinant A definujeme „indukcí": umíme-li určit determinant $(n-1)$ řádu, pak definujeme

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} \quad , i \in \{1,2,\dots n\}$$

– rozvoj determinantu dle i-tého řádku

(lze ukázat, že na „výběru" řádku v matici A nezáleží)

Také $\det A = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \dots + a_{nj} A_{nj}$, $j \in \{1, 2, \dots n\}$
- rozvoj determinantu dle j-tého sloupce

(opět - „nezáleží" na výběru j)

<u>Platí: $\det A = \det A^T$</u> (A^T - matice transponovaná k A)

<u>Příklady:</u>

1.
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

(rozvoj dle 1. řádku)
$$= 1 \cdot (-1) - 2(2-1) - 1(2-0) = -5$$

také (rozvoj dle 2. sloupce)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= -2(2-1) + 0 - (1-(-2)) = -5$$

2. <u>Determinant horní trojúhelníkové matice</u>

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} \dots & a_{3n} \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$$

<u>Př.</u>
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 72 \\ 0 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 2 = 6$$

(3) Pro determinant matice řádu 3 – máme t.zv.
<u>Sarrusovo pravidlo</u>:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right| = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}) \end{array}$$

„opakované" sloupce

(tj. vynásobíme prvky v hlavní diagonále a dvou „rovnoběžkách" se znaménkem <u>(+)</u> a ve vedlejší diagonále a „rovnoběžkách" s ní opět vynásobíme a „přidáme" se znaménkem <u>(−)</u> !

<u>Odvození</u> (třeba rozvoj dle 1. řádku):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

<u>Př.</u>

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right| = \begin{array}{l} 1.0.1 + 2.1.1 + (-1).2.1 - \\ -(1.0(-1)) + 1.1.1 + 1.2.2) = -5 \end{array}$$

<u>Poznámka</u> Z definice determinantu rozvojem dle řádku (sloupce) je „vidět", že je výhodné mít řádek (sloupec) v determinantu s co nejvíce nulami, tj. otázka – – lze „upravovat determinanty" jako matice – – tj. přesněji – jsou determinanty ekvivalentních matic „stejné"? – Obecně ne, ale možnosti ukážeme.

Vlastnosti determinantu matice (A – čtvercová matice)

1. $\det A = \det A^T$ (tj. „co platí" pro řádky, platí i pro sloupce" v $\det A$)

2. Má-li A jeden řádek (sloupec) nulový, je $\det A = 0$ (rozvineme $\det A$ dle nulového řádku)

3. „Vyměníme-li" v $\det A$ dva řádky (sloupce) „mezi sebou", „determinant změní znaménko.

4. A odtud plyne – má-li matice A dva řádky (sloupce) stejné, je $\det A = 0$

5. Vynásobíme-li v matici A řádek (sloupec) konstantou c, pak se vynásobí i determinant číslem c.

$$\begin{vmatrix} ca_{11}, & ca_{12} & \dots & ca_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

6. $$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11}, & a_{12}+b_{12}, & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} = \det A + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(rozvojem dle 1. řádku + distributivní zákon) a odtud:

(7.) Hodnota determinantu matice A se nezmění, pokud k lib. řádku přičteme násobek jiného řádku.
(analog. pro sloupce)

<u>Z bodů 5, 6, 7 plyne, jak můžeme determinant „upravovat"</u>

Př.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(9-4) = \underline{\underline{-5}}$$

„vynulujeme 3. sloupec

asi šikovnější „vynulovat" sloupec 2. (už zde „0" je)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{1.ř. - 2\times 3.ř.}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1).1.\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-1+6) = \underline{\underline{-5}}$$

zkusme ještě „vynulovat" 2. řádek (užijeme úpravu pomocí sloupců matice)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{1.sl. - 2\times 3.sl}{=} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.(-1)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$- (3.1 - (-1).2) = \underline{\underline{-5}}$$

Př.
$$\begin{vmatrix} a & -a & 3a \\ b & 2b & -b \\ 2c & c & c \end{vmatrix} \underset{(5)}{=} a.b.c \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$
(vynulujeme "2. řádek")

$$= abc \begin{vmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = abc\cdot(-1)\cdot(-1) \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} =$$
(rozvoj dle 2. řádku)

$$= 3abc \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3(abc)(4.1 - 5.1) = \underline{-3abc}$$

Př. (hádanka + humor)
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 132 & 210 & 311 & 412 \end{vmatrix} = 0$$

(neboť 4. řádek = 1. řádek × 100 + 2. řádek × 10 + 3. řádek

<u>Další důležité vlastnosti determinantů matic</u>

(8) A, B čtvercové matice $\Rightarrow \det(A\cdot B) = \det A \det B$

(9) A je regulární $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

Užití determinantu matice

1. „teoretické" (i) Je-li A regulární matice, pak

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \left(A_{ij} \right)^T \quad \left(A_{ij} \text{ je algebraický doplněk k } a_{ij} \text{ v } A \right)$$

(ii) Je-li A regulární matice, pak

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

(iii) Je-li A regulární, pak řešení soustavy

$$A x = b \qquad \left(A(n \times n),\ x \in R^n,\ b \in R^n \right)$$

lze vyjádřit ($x = (x_1, .., x_n)$)

$$x_i = \frac{\det A^{(i)}}{\det A}, \quad i = 1, 2, .. n,$$

kde $A^{(i)}$ je matice, která má i-tý sloupec vektor b, a ostatní sloupce jsou sloupce matice A.

(Cramerovo pravidlo)

1. V „geometrii" (analytické)

a) $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$ – pak

$$S=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$\underset{\text{(jak známo)}}{=}$ $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ (tak zvaný smíšený součin vektorů $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$)

a je zároveň $|S|$ = objem rovnoběžnostěnu se stranami $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, pokud jsou tyto vektory lineárně nezávislé.

dále – $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = -\vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{b}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = -\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{c})$ (atd.)

b) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in R^3$ jsou lineárně závislé $\Leftrightarrow$ „$\begin{vmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \\ \vec{c} \end{vmatrix} = 0$"

Toto lze využít při „výpočtu" rovnice roviny, jsou-li dány tři body $A,B,C\in\varrho$, které neleží na jedné přímce:

$X\in\varrho \Leftrightarrow X-A, B-A, C-A$ jsou LZ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ „$\begin{vmatrix} X-A \\ B-A \\ C-A \end{vmatrix} = 0$", tj. $\begin{vmatrix} x_1-a_1, & x_2-a_2, & x_3-a_3 \\ b_1-a_1, & b_2-a_2, & b_3-a_3 \\ c_1-a_1, & c_2-a_2, & c_3-a_3 \end{vmatrix} = 0$

Příklad A [1, −1, 2] B [0, 1, 1] C [−1, 0, 2]

$B-A = (-1, 2, -1)$
$C-A = (-2, 1, 0)$ } LNZ (⇒ (A, B, C neleží na jedné přímce)
$X-A = (x-1, y+1, z-2)$

Rovnice roviny ABC :

$$\begin{vmatrix} x-1, & y+1, & z-2 \\ -1, & 2, & -1 \\ -2, & 1, & 0 \end{vmatrix} = 0 \,,$$ tj. (rozvineme dle 1. řádku)

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}(x-1) - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}(y+1) + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}(z-2) = 0 \,,$$

tj. $\underline{(x-1) + 2(y+1) + 3(z-2) = 0}$

II. lineární zobrazení $L: R^n \longrightarrow R^m$

Definice lineárního zobrazení (obecně)

V_1, V_2 – vektorové prostory, pak $L: V_1 \to V_2$ je lineární zobrazení, když platí:

$\forall\, x_1, x_2 \in V_1: \quad L(x_1 + x_2) = L(x_1) + L(x_2)$

$\forall\, x \in V_1, c \in R: \quad L(cx) = cL(x)$

Speciálně : $L: R^n \to R^m$

1. je-li $L(\vec{0}) \neq \vec{0} \Rightarrow L$ není lineární

Př. $L(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 2,\ x_1 + x_2 + x_3,\ x_2 + 2x_3)$

$L(0,0,0) = (2,0,0) \Rightarrow L$ není lineární

2. $L(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2 + x_3,\ x_1 - 2x_3,\ x_1 + x_2 + x_3)$ –

– je L zobrazení lineární ?

zapišme L „jinak"

$$L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + x_3 \\ x_1 \quad\quad - 2x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

násobení matice a vektoru $(= A \cdot x)$

a protože pro násobení matic platí (pokud je násobení def.)

$$A(B+C) = AB + AC \quad \text{(distributivní zákon)}$$

tak 1) $L(x+y) = A(x+y) = Ax + Ay = L(x) + L(y)$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

2) $L(cx) = A \cdot \begin{pmatrix} cx_1 \\ cx_2 \\ cx_3 \end{pmatrix} = c\, A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\, L(x)$,

tj. zobrazení L je lineární.

A je vidět, že lze tento příklad „zobecnit":

Je-li dána matice $A(m,n)$, pak zobrazení $L(x) = A\cdot x$ je lineární zobrazení z R^n do R^m.

! <u>Platí i tvrzení obrácené</u> –

je-li $L: R^n \longrightarrow R^m$ lineární, pak existuje matice A typu (m,n) taková, že

$$L(x) = A\cdot x\,, \quad x \in R^n$$

Matice A závisí na bázi v prostoru R^n a také na volbě báze v R^m.

<u>Příklad</u>: Je-li dáno zobrazení $L: R^n \to R^m$, pak je dán obraz všech „vektorů" z R^n, a tj. i obrazy báze – a to „využijeme" k nalezení A.

(1) Je dáno $L: R^3 \longrightarrow R^2$, a

$$L\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix},\quad L\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\quad L\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

pak $L(x) = L\left(x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) \underset{\text{linearita}}{=}$

$$= x_1 L\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + x_2 L\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} =$$

$$= x_1\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x_1 + x_2 + 2x_3\\ 2x_1 + x_2 + x_3\end{pmatrix}$$

$$= \underline{\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}}$$

② $L : R^3 \to R^3$

$$L\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$$

Pak
(rychleji! „už")

$$L\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\-1 & -1 & 1\\0 & -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \quad (= A\cdot x)$$

Tedy matici zobrazení dostaneme" tak, že obrazy vektorů báze „napíšeme" do sloupců" matice

<u>zde dále</u>: $\det A = \begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\-1 & -1 & 1\\0 & -1 & -2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & -1 & -2\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}1 & 1\\0 & -1\end{vmatrix} = 1$

$\Rightarrow$ A je regulární matice, tj. zobrazení
<u>$L(x) = Ax$ je prosté zobrazení R^3 na R^3</u> !

matice inverzního zobrazení je A^{-1}:

$$A\cdot x = y \iff x = A^{-1}y$$

$x, y \in R^3$

(tedy, inverzní zobrazení je opět lineární)

a zde tedy
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

(a vypočtěme-li A^{-1})
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

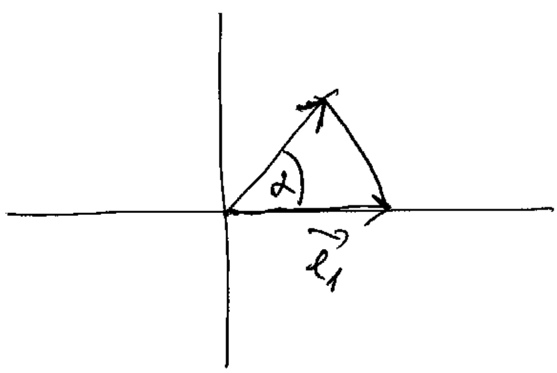
③ Otočení vektoru v rovině o $\measuredangle \alpha$ (v kladném smyslu)

otočení vektoru o $\measuredangle \alpha$ .. označme O_α

1) O_α je lineární zobrazení v rovině, vektory popíšeme souřadnicemi $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in R^2$:

stačí tedy (viz předchozí příklady) obrazit „bázi", tj. $O_\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$, $O_\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$ a

matice: $O_\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ — jak snadné!



otočení zpět "$-$ o $\measuredangle (-\alpha)$" –
„inverzní" zobrazení!

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha, & \sin\alpha \\ -\sin\alpha, & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos(-\alpha), & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha), & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

(det matice otočení $= 1$)